



试验设计中的重复试验次数的确定

管宇¹ 杨琪瑜²

(1 浙江林学院 应用数学系, 浙江 临安 311300; 2 南京林业大学 应用数学系, 江苏 南京 210037)

摘 要: 研究单因素、双因素的方差分析, 提出因素水平差异显著与否, 主要取决于试验效应的平方和 (或试验效应方差) 与随机误差。引入平均相对试验效应, 在其已知前提下, 给出保证一定概率的因素水平差异显著的最小总试验次数、或每水平的最小平均重复试验次数。

关键词: 试验设计; 重复试验次数; 试验效应; 随机误差

中图分类号: O212

MR 分类号: 62B15; 62K99

文献标识码: A

文章编号: 1001-9626(2005)03-0369-06

0 引言

在试验设计时设置重复试验, 能够估计试验误差; 重复试验次数越多试验误差越低, 试验精确度越高。一般认为, 适宜重复次数应保证使误差项自由度至少为 12, 否则 F 检验或 t 检验的临界值上升很快, 难以呈现显著性^[1]。如果事先了解了试验的变异系数, 则可根据精确度所要求的标准误差算出应有的重复次数^[2]。还有其它如利用信息相对量^[3]、根据实际经验等方法得出的各种算法^[4,5]。文 [6] 利用计算机进行大量随机模拟试验, 揭示了正交试验设计中因素水平差异显著与否, 主要取决于试验效应的平方和与随机误差。一般的试验设计的分析方法主要是方差分析, 试验因素水平差异显著与否, 也是主要取决于试验效应的平方和 (或试验效应方差) 与随机误差。在绝大多数情形下, 人们做试验目的是要说明某些因素水平有显然差异, 即对试验结果作方差分析时, 希望某些因素的 F 比大于 F_α 。本文研究单因素、双因素的方差分析, 引入平均相对试验效应, 在其已知前提下, 给出保证一定概率的因素水平差异显著的最小总试验次数、或每水平的最小平均重复试验次数。

1 单因素方差分析的重复次数

(一) 固定模型: 设因素 A 有 a 个水平 $A_1, A_1, \dots, A_a$, 水平 A_i 下重复试验 m_i 次 ($i = 1, 2, \dots, a$), 模型: $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$; $i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, m_i$ 。其中: x_{ij} 为观测值, μ 为总体平均值, α_i 为水平 A_i 的试验效应且 $\sum_{i=1}^a m_i \alpha_i = 0$, ε_{ij} 为试验随机误差、相互独立且都服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布。设 α 是犯第一类错误的概率, $n = \sum_{i=1}^a m_i$, $\delta_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a m_i \alpha_i^2 / \sigma^2$, 等重复试验时 $\delta_1 = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 / \sigma^2$ 。 δ_1 表示试验效应平方的平均值与试验随机误

收稿日期: 2004-01-05

作者简介: 管宇 (1964-), 男, 浙江台州人。

差 (方差) 之比, 不妨简称为平均相对试验效应.

记 $SSA = \sum_{i=1}^a m_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$, $SSe = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$, $E(SSA) = \sum_{i=1}^a m_i \alpha_i^2 + (a-1)\sigma^2$,
 $E(SSe) = (n-a)\sigma^2$, $F_A = \frac{MSA}{MSe} = \frac{SSA/(a-1)}{SSe/(n-a)} \sim F(a-1, n-a; n\delta_1)^{[7]}$. 若假设 $H_0: \delta_1 = 0$
 成立, 即所有 α_i 都为 0, $F_A \sim F(a-1, n-a)$; 拒绝域 $F_A \geq F_\alpha(a-1, n-a)$. 又 $\frac{E(MSA)}{E(MSe)} =$
 $1 + n\delta_1/(a-1)$, 因此 δ_1 的估计式: $\hat{\delta}_1 = (F_A - 1)(a-1)/n$. 当水平数确定、 δ_1 已知 (如利用
 历史数据估计) 时, 如果希望以概率 β 要求试验结果因素 A 水平有显著差异, 则总试验次数 n
 满足: $P\{F_A \geq F_\alpha(a-1, n-a)\} \geq \beta$, 即 $P\{F(a-1, n-a; n\delta_1) \geq F_\alpha(a-1, n-a)\} \geq \beta$, 简
 记为: $F_\beta(a-1, n-a; n\delta_1) \geq F_\alpha(a-1, n-a)$.

(二) 随机模型: (仅列出与固定模型不同的部份)

$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $\alpha_i \sim N(0, \sigma_A^2)$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$; $i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, m_i$
 $E(SSA) = n(1-a^{-1})\sigma_A^2 + (a-1)\sigma^2$. 记 $\delta'_1 = (1-a^{-1})\sigma_A^2/\sigma^2$ (这样处理目的使非中心 F 分布的
 非中心参数形式都为 $n\delta$, 多因素模型也如此处理; 这便于计算和各类模型、因素之间比较, 所有
 δ 都称为平均相对试验效应), δ'_1 的估计式: $\hat{\delta}'_1 = (F_A - 1)(a-1)/n$, $F_A = MSA/MSe \sim$
 $F(a-1, n-a; n\delta'_1)$. 希望以概率 β 要求试验结果因素 A 水平有显然差异, 总试验次数 n 满足:
 $F_\beta(a-1, n-a; n\delta'_1) \geq F_\alpha(a-1, n-a)$.

(三) 计算

Matlab 软件有现成的中心 F 分布和非中心 F 分布 (近似) 值可供直接调用, 能非常方便
 地实现本文所需计算, 指令分别为: $F_\alpha(s, t) = \text{finv}(s, t)$, $F_\beta(s, t; \lambda) = \text{nfcinv}(1-\beta, s, t, \lambda)$.
 也可采用公式近似计算^[7~9], 如有以下较好算式 (误差与直接调用 Matlab 所得结果相当)^[8]:

$$\begin{cases} F_\beta(s, t; \lambda) \approx v \cdot F_\beta(u, t) - w \\ u = (s + 2\lambda)^3 / (s + 3\lambda)^2 \\ v = (u/s) \sqrt{[(t-2)(s+2\lambda) + (s+\lambda)^2] / [u^2 + (t-2)u]} \\ w = (v - 1 - \lambda/s) \cdot t / (t-2) \end{cases} \quad (1)$$

这样就变成 2 个 (中心)F 分布的计算比较, 单因素固定模型、随机模型最小总试验次数 n 值满
 足: $v \cdot F_\beta(u, n-a) - w \geq F_\alpha(a-1, n-a)$ (其中 λ 分别取 $n\delta_1$ 、 $n\delta'_1$, u, v, w 按式 (1) 计算).

例 1 4 水平的单因素试验: 当 $\lambda = 1.0$, $\alpha = 0.05, 0.01$ 时, 分别至少共要设置 16、22、
 28 次和 22、29、36 次试验, 分别确保 80、95、99% 的概率使试验结果差异显著或非常
 显著. 若是等重复试验则每个水平分别需要重复 4、6、7 和 6、8、9 次试验.

2 双因素方差分析的等重复次数

(一) 固定模型: 设因素 A 有 a 个水平 $A_1, \dots, A_a$ 、因素 B 有 b 个水平 $B_1, \dots, B_b$, 每对
 水平 A_i 、 B_j 搭配作用下都重复试验 r 次 ($i = 1, 2, \dots, a, j = 1, 2, \dots, b$), 模型:

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2); i = 1, 2, \dots, a; j = 1, 2, \dots, b; k = 1, 2, \dots, r$$

其中: x_{ijk} 为观测值, μ 为总体平均值; α_i 、 β_j 各为水平 A_i 、 B_j 的试验效应, $(\alpha\beta)_{ij}$ 是水平 A_i 与 B_j 交互作用的试验效应, 且 $\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$ 、 $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$ 、 $\sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} = 0$; ε_{ijk} 为试验随机误差、相互独立且都服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布

$$E(SSA) = (a-1)\sigma^2 + br \sum_{i=1}^a \alpha_i^2, \quad E(SSB) = (b-1)\sigma^2 + ar \sum_{j=1}^b \beta_j^2,$$

$$E(SSAB) = (a-1)(b-1)\sigma^2 + r \sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij}^2$$

设 $n = abr$, $\delta_A = a^{-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 / \sigma^2$, $\delta_B = b^{-1} \sum_{j=1}^b \beta_j^2 / \sigma^2$, $\delta_{AB} = (ab)^{-1} \sum_{i,j} (\alpha\beta)_{ij}^2 / \sigma^2$. 估计式:

$$\hat{\delta}_A = (a-1)(F_A - 1)/n, \quad \hat{\delta}_B = (b-1)(F_B - 1)/n, \quad \hat{\delta}_{AB} = (a-1)(b-1)(F_{AB} - 1)/n,$$

$$F_A \sim F(a-1, n-ab; n\delta_A), \quad F_B \sim F(b-1, n-ab; n\delta_B), \quad F_{AB} \sim F((a-1)(b-1), n-ab; n\delta_{AB})$$

希望以概率 β 要求试验结果因素 A、B、AB 水平有显然差异, 总平均重复试验次数 r 分别满足:

$$\begin{cases} F_\beta(a-1, n-ab; n\delta_A) \geq F_\alpha(a-1, n-ab) \\ F_\beta(b-1, n-ab; n\delta_B) \geq F_\alpha(b-1, n-ab) \\ F_\beta((a-1)(b-1); ab(r-1); n\delta_{AB}) \geq F_\alpha((a-1)(b-1), ab(r-1)) \end{cases}$$

对于无交互作用的情形则 r 满足二式之一:

$$\begin{cases} F_\beta(a-1, abr-a-b+1; n\delta_A) \geq F_\alpha(a-1, abr-a-b+1) \\ F_\beta(b-1, abr-a-b+1; n\delta_B) \geq F_\alpha(b-1, abr-a-b+1) \end{cases}$$

(二) 随机模型: (仅列出与固定模型不同的部份)

$$\begin{cases} x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad \alpha_i \sim N(0, \sigma_A^2), \quad \beta_j \sim N(0, \sigma_B^2), \quad (\alpha\beta)_{ij} \sim N(0, \sigma_{AB}^2) \\ \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, b; \quad k = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(SSA) = (a-1)(\sigma^2 + r\sigma_{AB}^2) + (a-1)br\sigma_A^2, & E(SSB) = (b-1)(\sigma^2 + r\sigma_{AB}^2) + (b-1)ar\sigma_B^2, \\ E(SSAB) = (a-1)(b-1) \times (\sigma^2 + r\sigma_{AB}^2), & E(SSe) = ab(r-1)\sigma^2 \end{cases}$$

$$\text{记 } \delta'_A = (1-a^{-1}) \frac{\sigma_A^2/\sigma^2}{1+r\sigma_{AB}^2/\sigma^2}, \quad \delta'_B = (1-b^{-1}) \frac{\sigma_B^2/\sigma^2}{1+r\sigma_{AB}^2/\sigma^2}, \quad \delta'_{AB} = (1-a^{-1})(1-b^{-1})\sigma_{AB}^2/\sigma^2.$$

$$\text{估计式: } \hat{\delta}'_A = (a-1)(F_A - 1)/n, \quad \hat{\delta}'_B = (b-1)(F_B - 1)/n, \quad \hat{\delta}'_{AB} = (a-1)(b-1)(F_{AB} - 1)/n.$$

希望以概率 β 要求试验结果因素 A、B、AB 水平有显然差异, 每水平搭配重复试验次数 r 满足:

$$\begin{cases} F_\beta(a-1, (a-1)(b-1); n\delta'_A) \geq F_\alpha(a-1, (a-1)(b-1)) \\ F_\beta(b-1, (a-1)(b-1); n\delta'_B) \geq F_\alpha(b-1, (a-1)(b-1)) \\ F_\beta((a-1)(b-1), n-ab; n\delta'_{AB}) \geq F_\alpha((a-1)(b-1), n-ab) \end{cases}$$

(三) 混合模型: (仅列出与前面不同的部份, 因素 A 为固定因素, 因素 B 为随机因素)

$$\begin{cases} x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, & \beta_j \sim N(0, \sigma_B^2), & (\alpha\beta)_{ij} \sim N(0, (a-1)a^{-1}\sigma_{AB}^2) \\ \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2); & i = 1, 2, \dots, a; & j = 1, 2, \dots, b; & k = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$, $\sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, a$, $E(SSA) = (a-1)(\sigma^2 + r\sigma_{AB}^2) + br \sum_{i=1}^a \alpha_i^2$, $E(SSB) = (b-1)(\sigma^2 + ar\sigma_B^2)$, $E(SSAB) = (a-1)(b-1)(\sigma^2 + r\sigma_{AB}^2)$, $E(SSe) = ab(r-1)\sigma^2$. 记 $\delta_A'' = (1-a^{-1})(1+r\sigma_{AB}^2/\sigma^2)^{-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i^2/\sigma^2$, $\delta_B'' = (1-b^{-1})\sigma_B^2/\sigma^2$, $\delta_{AB}'' = (1-a^{-1})(1-b^{-1})\sigma_{AB}^2/\sigma^2$.

估计式: $\hat{\delta}_A'' = (a-1)(F_A - 1)/n$, $\hat{\delta}_B'' = (b-1)(F_B - 1)/n$, $\hat{\delta}_{AB}'' = (a-1)(b-1)(F_{AB} - 1)/n$.

如果希望以概率 β 要求因素水平有显然差异, 等重复试验次数 r 满足下列三个不等式之一:

$$\begin{cases} F_\beta(a-1, (a-1)(b-1); n\delta_A'') \geq F_\alpha(a-1, (a-1)(b-1)) \\ F_\beta(b-1, n-ab; n\delta_B'') \geq F_\alpha(b-1, n-ab) \\ F_\beta((a-1)(b-1), n-ab; n\delta_{AB}'') \geq F_\alpha((a-1)(b-1), n-ab) \end{cases}$$

容易看出, 当平均相对试验效应相同时, 要使主效应差异显著, 随机模型与混合模型比固定模型需要更多的重复试验, 因此选择模型要正确. 文献 [10] 例 5.7 四台同型号机器和近百名操作工人的试验, 采用的是混合模型; 若改用固定模型将得出机器性能差异极显著的错误结论.

表 1 当 $\alpha = 0.05, 0.01$, $\beta = 0.80, 0.95, 0.99$ 时, 单因素最小总试验次数 n 值

Table 1 The Best Experimental Units on Single Factor of $\alpha = 0.05, 0.01$ and $\beta = 0.80, 0.95, 0.99$

δ	α	3	4	5	6	7	8	9	10	20
0.5	0.05	23, 35, 47	26, 39, 52	29, 43, 55	32, 46, 60	35, 49, 63	37, 52, 66	39, 54, 69	41, 57, 72	58, 77, 96
	0.01	33, 47, 60	37, 52, 66	41, 56, 71	44, 60, 75	47, 63, 79	50, 67, 83	52, 70, 86	55, 72, 90	75, 96, 106
1.0	0.05	14, 19, 25	16, 22, 28	18, 24, 31	20, 26, 33	21, 28, 35	23, 30, 38	24, 32, 39	26, 34, 41	39, 48, 57
	0.01	19, 26, 33	22, 29, 36	24, 32, 39	26, 34, 42	28, 37, 44	30, 39, 47	32, 41, 49	34, 42, 51	48, 59, 69
2.0	0.05	9, 12, 15	11, 14, 17	12, 16, 19	14, 17, 20	15, 19, 22	16, 20, 23	18, 21, 25	19, 23, 26	30, 34, 39
	0.01	13, 16, 19	15, 18, 22	16, 20, 24	18, 22, 26	19, 23, 27	21, 25, 29	22, 26, 31	23, 28, 32	35, 41, 46

注: 表 1 中 “,” 号前后按 $\beta = 0.80, 0.95, 0.99$ 排列的 n 值, 等重复试验的最小重复次数 $r = \lceil n/a \rceil$.

3 随机模拟

模拟算法:

(1) 为方便计, 随机误差 σ^2 都取 1, 根据不同 δ (取 0.5、1.0、2.0) 值得 $\lambda = n\delta$. 固定模型因素 A 的试验效应各取 3 组: 1) 平均取值: 当 a 为偶数时, $\alpha_i = (-1)^{i+1}\sqrt{\lambda/a}$, $i = 1, 2, \dots, a$; 当 a 为奇数时, $\alpha_i = (-1)^{i+1}\sqrt{\lambda/(a-1)}$, $i = 1, 2, \dots, a-1$, $\alpha_a = 0$. 2) 1 个独大: $\alpha_1 = -\sqrt{\lambda \cdot (a-1)/a}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_a = \sqrt{\lambda/[a(a-1)]}$. 3) 2 个极大: $\alpha_1 = -\alpha_2 = \sqrt{\lambda/2}$, 其余效应全为零.

(2) 利用最常见的乘同余发生器产生 $[0, 1]$ 上的伪均匀随机数: 为编程运算方便取模 2^T , 乘子为形如 $8t+5$ 的 n 个 ($> 2^{T/2}$) 素数, 初始值就取等于乘子, 各运算 10^4 组数据 (并经独立性检验).

(3) 分别对 n 组均匀随机数列, 应用 Hasting 有理逼近方法^[11] (此法在标准正态分布伪随机数发生器中属运算量适中精度较高的较优算法) 产生 n 组标准正态分布伪随机数列 $\{z_{it}\}$,

再变换成一般正态分布伪随机数列 $\{y_{st} = \mu_s + \sigma_s \cdot z_{st}\} (s = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots)$. 其中 y_{st} 表示第 s 个观测值 (点) 的第 t 个模拟值, μ_s 和 σ_s 表示第 s 个观测值 (点) 的均值和标准差. 水平数为 b 的随机 (模型) 因素效应通过产生 b 个正态分布伪随机数获得.

(4) 分别累计 F 比的频数: $F < F_{0.10}$, $F_{0.10} \leq F < F_{0.05}$, $F_{0.05} \leq F < F_{0.01}$, $F \geq F_{0.01}$, 输出相应的频率 w_1, w_2, w_3, w_4 .

表 2 当 $\alpha = 0.05$ 时, 双因素的最少重复试验次数 r 值Table 2 The Least Replicated Experimental Units on Double Factor of $\alpha = 0.05$

δ	因素	3×3	3×4	3×5	3×6	4×4	4×5	4×6	5×5	5×6	6×6
0.5	A 无	3, 4, 6	2, 3, 4	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2	1, 2, 2
	B 无	3, 4, 6	3, 4, 5	2, 3, 4	2, 3, 4	2, 3, 4	2, 3, 3	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2	1, 2, 2
	A 固	3, 4, 6	3, 3, 4	2, 3, 4	2, 3, 3	2, 3, 4	2, 3, 3	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2
	B 固	3, 4, 6	3, 4, 5	3, 3, 4	2, 3, 4	2, 3, 4	2, 3, 3	2, 3, 3	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2
	AB	4, 5, 7	3, 5, 6	3, 4, 5	3, 4, 5	3, 4, 5	3, 4, 5	3, 3, 4	3, 3, 4	3, 3, 4	2, 3, 4
	A 随	5, 9, 13	3, 5, 7	2, 4, 5	2, 3, 4	3, 4, 5	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2
	B 随	5, 9, 13	4, 6, 9	3, 5, 7	3, 4, 6	3, 4, 5	2, 3, 4	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2
	AB	4, 5, 7	3, 5, 6	3, 4, 5	3, 4, 5	3, 4, 5	3, 4, 5	3, 3, 4	3, 3, 4	3, 3, 4	2, 3, 4
1.0	A 无	2, 3, 3	2, 2, 3	1, 2, 2	1, 2, 2	2, 2, 2	1, 2, 2	1, 1, 2	1, 1, 2	1, 1, 2	1, 1, 1
	B 无	2, 3, 3	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	1, 2, 2	1, 2, 2	1, 1, 2	1, 1, 2	1, 1, 1
	A 固	2, 3, 3	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
	B 固	2, 3, 3	2, 3, 3	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
	AB	3, 3, 4	2, 3, 4	2, 3, 3	2, 3, 3	2, 3, 3	2, 3, 3	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2
	A 随	3, 5, 7	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
	B 随	3, 5, 7	2, 3, 5	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
	AB	3, 5, 7	2, 3, 5	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
2.0	A 无	2, 2, 2	1, 2, 2	1, 1, 2	1, 1, 1	1, 1, 2	1, 1, 1	1, 1, 1	1, 1, 1	1, 1, 1	1, 1, 1
	B 无	2, 2, 2	1, 2, 2	1, 2, 2	1, 1, 2	1, 1, 2	1, 1, 1	1, 1, 1	1, 1, 1	1, 1, 1	1, 1, 1
	A 固	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
	B 固	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
	AB	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
	A 随	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
	B 随	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2
	AB	2, 3, 4	2, 2, 3	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2	2, 2, 2

注: 表 2 中“3×5”表示因素 A、B 的水平数分别为 3 和 5, 下标“无、固、随”分别对应无交互作用、固定模型、随机模型. 不同模型的交互作用因素 AB 结果都一样, 故只列 1 行; 混合模型因素 A、B 分别与固定模型因素 A、随机模型因素 B 结果相同. “3,3,4”分别表示 $\beta = 0.80, 0.95, 0.99$ 时的重复试验次数.

模拟结果 (用 VC++ 编程运算):

(1) 当 $\lambda = n\delta$ 给定后, 因素 A 效应 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a$ 的不同取值对频率 w_1, w_2, w_3, w_4 影响很小, 影响结果的关键因素是所有试验效应的平方和.

例 2 4 水平 5 次等重复试验 (固定模型, $\delta = 1.0$) 3 组不同效应的模拟频率 (%): 1) 3.175、4.488、18.375、73.962, 2) 3.112、4.575、18.438、73.875, 3) 3.225、3.775、20.025、72.975. 3 组试验效应的取法代表 3 种极端情形, 模拟结果显示差异不大; 那么其它情形结果自然不会有更大的差异.

(2) 采用不同的乘同余发生器 (种子和模至少一个不同), 也几乎不影响模拟结果, 说明随机模拟具有相当的准确性.

例 3 对例 2 情形 1) 采用: (i) 模同、种子不同 (ii) 模不同、种子同 (iii) 模和种子都不同的 3 类发生器模拟. 结果如下: (i) 3.113、3.962、18.825、74.100, (ii) 2.900、4.513、18.812、73.775, (iii) 3.537、4.063、17.750、74.650; 差异不大.

(3) 经过大量的随机模拟, 其结果都验证了表 1、2 数据的正确性.

4 结论

本文只讨论了单因素和双因素情形,显然完全可以推广到更多因素的情形.

我们通过对大量文献期刊、书籍上的试验设计实例计算后发现:相对平均试验效应有大有小,平均重复试验次数有多有少,结论也有差异显著和差异不显著.当平均重复试验次数相同时,相对平均试验效应越大水平差异越显著.当相对平均试验效应较小时,只要增加一定数量的重复试验就能使结果差异显著.例如文献[10]例5.4,最大的因素A的 $\hat{\delta}_A = 0.22$ 试验结果F比大于 $F_{0.05}$,显然是因为 4×3 试验每水平搭配都重复试验3次缘故.由表2知:大多数情形的双因素试验,每水平搭配重复试验3次就足以使其中某因素水平差异显著.

不管试验效应多么的小,只要增加重复试验次数就能使结果差异显著;同样地尽管试验效应较大,如果试验次数少也有可能使结果差异不显著.因此我们建议应该根据不同的行业特点,给出各自较为合理的相对平均试验效应的下限(过小的试验效应很有可能来自其它未考虑原因),以保证统计试验方法的科学性和严肃性.

参考文献

- [1] 马育华著. 试验设计 [M]. 北京: 农业出版社, 1982. 20-22, 376.
- [2] 续九如, 黄智慧编著. 林业试验设计 [M]. 北京: 林业出版社, 1995. 3.
- [3] 马浩, 刘君慧, 刘涛等. 林木育种试验设计效率分析 [J]. 北京林业大学学报, 1999, 21(5):11-15.
- [4] 李新国, 续九如, 朱之梯. 林木田间试验适宜重复数和小区株数的研究 [J]. 北京林业大学学报, 1993, 15(4):103-111.
- [5] 张作仿, 张传海, 姜文武等. 小麦品种联合试验效应及理论依据 III. 重复数品种数小区大小与效率 [J]. 生物数学学报, 1995, 10(4):205-209.
- [6] 管宇, 黄必恒, 吴志松等. 关于正交试验的重复试验问题 [J]. 浙江林学院学报, 2003, 20(4):413-418.
- [7] 项可风, 吴启光著. 试验设计与数据分析 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1989, 164-178, 232-242, 232-245.
- [8] Mudholker G S, Chaubey Y P, Lin. Ching-Chuong. Some approximations for the noncentral-F distribution[J]. *Technometrics*, 1976, 18(3):351-358.
- [9] 方开泰, 许建伦编著. 统计分布 [M]. 北京: 科学出版社, 1987, 207-211.
- [10] 张德培, 罗蕴玲著. 应用概率统计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2000, 172-185.
- [11] 高惠璇. 统计计算 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1995, 146-151.

On Replicated Experimental Units of Design of Experiments

GUAN Yu¹ YANG Qi-Yu²

(1 Department of Applied Mathematics, Zhejiang Forestry University, Lin'an Zhejiang 311300 China)

(2 Department of Applied Mathematics, Nanjing Forestry University, Nanjing Jiangsu 210037 China)

Abstract: After studying analysis of variance on single factor and double factor, this paper reveals that if the difference between levels of the primes exist noteworthily is mainly depended on the sum of its experiment effects or variance of experiment effects and stochastic difference. The notion of average-relative-experiment-effects is introduced, if it's known we can obtain the lest experimental units and the lest average replicated experimental units of per level to a certainty probability and significance of difference among factor levers are assured.

Key words: Design of experiments; Replicated experimental units; Experiment effects; Stochastic difference