

刘娟,赵清,程彩萍,等.具有脉冲效应的 2 个食饵 1 个捕食者系统的稳定性[J].江苏农业科学,2018,46(18):94-97.

doi:10.15889/j.issn.1002-1302.2018.18.023

具有脉冲效应的 2 个食饵 1 个捕食者系统的稳定性

刘娟¹,赵清²,程彩萍¹,张海峰¹

(1.山西农业大学文理学院,山西太谷 030801;2.山西农业大学农学院,山西太谷 030801)

摘要:考虑到化学农药对天敌的影响,利用具有 Holling II 和 Monod-Haldance 功能性反应的脉冲微分方程,建立在不同脉冲时刻分别投放天敌和喷洒化学农药的 2 个食饵 1 个捕食者模型。利用 Floquet 理论、频闪映射及比较定理,得到食饵全部灭绝周期解渐近稳定的充分条件。最后利用数值模拟验证了模型的正确性。

关键词:害虫综合治理;捕食系统;脉冲微分方程;渐近稳定

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1002-1302(2018)18-0094-04

众所周知,害虫会对农作物及人类造成很大的危害,因此研究害虫治理方法是非常必要的。利用化学防治的快速性和生物防治的无污染性,提出比任一单一控制更优的害虫综合治理策略,此课题引起国内外学者的广泛关注^[1-10],其中数学者引入脉冲微分方程来描述此不连续的瞬时行为^[1-10]。国内外学者对 1 个食饵 1 个捕食者系统进行了大量的研究^[1-4],但是实际中天敌不仅仅只捕食 1 类害虫,而且害虫的种类也不只 1 种^[6-8]。例如蚜虫和梨木虱都取食梨树汁液,都为梨树的害虫,瓢虫同时捕食蚜虫和梨木虱,为它们共同的天敌。Zhang 等研究了 2 个食饵 1 个捕食者系统,但是仅讨论了在同一固定时刻投放天敌和喷洒农药的模型^[6]。基于上述事实,本研究利用具有 Holling II 和 Monod-Haldance 功能性反应的脉冲微分方程,建立在不同脉冲时刻分别投放天敌和化学农药的 2 个食饵 1 个捕食者模型,并研究此模型的动力学行为。

1 模型的建立

本研究假设在没有捕食者时,2 类食饵均呈 Logistic 增长趋势,捕食者对食饵分别具有 Holling II 和 Monod-Haldance 功能性反应,建立如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) \left[r_1 - \frac{r_1}{K} x_1(t) \right] - b_1 x_1(t) x_2(t) - \frac{\alpha_1 x_1(t) z(t)}{1 + w_1 x_1(t)} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) \left[r_2 - \frac{r_2}{K} x_2(t) \right] - b_2 x_1(t) x_2(t) - \frac{\alpha_2 x_2(t) z(t)}{1 + w_2 x_2^2(t)} \\ \frac{dz(t)}{dt} = z(t) \left[-c + \frac{d_1 \alpha_1 x_1(t)}{1 + w_1 x_1(t)} + \frac{d_2 \alpha_2 x_2(t)}{1 + w_2 x_2^2(t)} \right] \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $z(t)$ 分别表示 t 时刻 2 类食饵、捕食者的

数量; c 表示捕食者的死亡率; r_1 、 r_2 分别为 2 类食饵的增长率; b_1 、 b_2 分别为 2 类食饵种群间的竞争系数, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$; d_1 、 d_2 分别为捕食者对 2 类食饵的消化率; K 为环境容纳量; $\frac{\alpha_1 x_1(t)}{1 + w_1 x_1(t)}$ 、 $\frac{\alpha_2 x_2(t)}{1 + w_2 x_2^2(t)}$ 分别为 Holling II、Monod-Haldance 功能性反应函数,其中 α_1 、 w_1 、 α_2 、 w_2 都为正常数。

当 2 个食饵灭绝,即 $x_1(t) = 0$ 、 $x_2(t) = 0$ 时,模型(1)有一个不稳定的平衡态(0,0,0),但此时捕食者也趋于灭绝,系统没有无害虫平衡点,因此用连续模型(1)无法对害虫进行很好的控制。

考虑到化学农药对天敌的影响,本研究建立在不同固定时刻分别投放捕食者和喷洒化学农药的脉冲动力系统:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) \left[r_1 - \frac{r_1}{K} x_1(t) \right] - b_1 x_1(t) x_2(t) - \frac{\alpha_1 x_1(t) z(t)}{1 + w_1 x_1(t)} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) \left[r_2 - \frac{r_2}{K} x_2(t) \right] - b_2 x_1(t) x_2(t) - \frac{\alpha_2 x_2(t) z(t)}{1 + w_2 x_2^2(t)} \\ \frac{dz(t)}{dt} = z(t) \left[-c + \frac{d_1 \alpha_1 x_1(t)}{1 + w_1 x_1(t)} + \frac{d_2 \alpha_2 x_2(t)}{1 + w_2 x_2^2(t)} \right] \end{cases} \quad t \neq (n+l-1)T, t \neq nT$$

$$\begin{cases} \Delta x_1(t) = -p_1 x_1(t) \\ \Delta x_2(t) = -p_2 x_2(t) \\ \Delta z(t) = -p_3 z(t) \end{cases} \quad t = (n+l-1)T$$

$$\begin{cases} \Delta x_1(t) = 0 \\ \Delta x_2(t) = 0 \\ \Delta z(t) = \mu \end{cases} \quad t = nT$$

式中: $\Delta x_i(t) = x_i(t^+) - x_i(t)$ ($i = 1, 2$), $\Delta z(t) = z(t^+) - z(t)$; T 为脉冲周期; μ 为 $t = nT$ 时投放捕食者的数量, $\mu > 0$; p_1 、 p_2 、 p_3 分别为 $t = (n+l-1)T$ 时因喷洒化学农药杀死的食饵、捕食者的比例,其中 n 为正整数, l 为(0,1)的任意实数, p_1 、 p_2 、 p_3 取值范围为[0,1)。

引理 1 模型(2)的解 $[x_1(t), x_2(t), z(t)]$ 是连续可微的,且前 3 个方程右端函数的光滑性保证了解存在唯一性。

引理 2 设 $X(t) = [x_1(t), x_2(t), z(t)]$ 为模型(2)的解,且初始条件 $X(0^+) \geq 0$,则对于所有的 $t \geq 0$ 有 $X(t) \geq 0$ 。若初始条件 $X(0^+) > 0$,则对于所有的 $t \geq 0$ 有 $X(t) > 0$ 。

考虑模型(2)中 $x_1(t) = 0$ 、 $x_2(t) = 0$ 时的状况,得出如下

收稿日期:2017-04-10

基金项目:国家自然科学基金(编号:31501876);山西省教育厅高等学校科技创新项目(编号:2014131);山西省科技厅面上青年基金(编号:201601D021122);山西农业大学科技创新基金(编号:2017019)。

作者简介:刘娟(1988—),女,山西朔州人,硕士,讲师,主要从事生物数学和微分方程研究。E-mail:liujuannk@163.com。

脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = -cz(t), t \neq (n+l-1)T, t \neq nT \\ z(t^+) = (1-p_3)z(t), t = (n+l-1)T \\ z(t^+) = z(t) + \mu, t = nT \\ z_0 = z(0^+) \end{cases} \quad (3)$$

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} \frac{\mu \exp\{-c[t-(n-1)T]\}}{1-(1-p_3)\exp(-cT)}, (n-1)T < t \leq (n+l-1)T \\ \frac{\mu(1-p_3)\exp\{-c[t-(n-1)T]\}}{1-(1-p_3)\exp(-cT)}, (n+l-1)T < t \leq nT \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{且有 } \tilde{z}(0^+) = \frac{\mu}{1-(1-p_3)\exp(-cT)}, \tilde{z}(lT^+) = \frac{\mu(1-p_3)\exp(-cT)}{1-(1-p_3)\exp(-cT)}, \text{ 并且得到的相应解为}$$

由频闪映射和不动点定理可知,模型(3)有如下周期解:

$$z(t) = \begin{cases} (1-p_3)^{n-1} \left[z(0^+) - \frac{\mu}{1-(1-p_3)\exp(-cT)} \right] \exp(-cT) + \tilde{z}(t), (n-1)T < t \leq (n+l-1)T \\ (1-p_3)^n \left[z(0^+) - \frac{\mu}{1-(1-p_3)\exp(-cT)} \right] \exp(-cT) + \tilde{z}(t), (n+l-1)T < t \leq nT \end{cases} \quad (5)$$

引理 模型(2)的任意正解 $z(t)$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时有 $z(t) \rightarrow \tilde{z}(t)$ 。满足 $T \leq \min\{T_1, T_2\}$, 则 2 类食饵全部灭绝周期解 $[0, 0, \tilde{z}(t)]$ 是局部渐近稳定的。其中 T_1, T_2 分别为 $f_1(T) = 0, f_2(T) = 0$ 的根。

因此模型(2)有 1 个食饵全部灭绝周期解, 为 $[0, 0, \tilde{z}(t)]$ 。

2 食饵全部灭绝周期解的渐近稳定性

定理 1 设 $[x_1(t), x_2(t), z(t)]$ 为模型(2)的任意解, 如果

$$f_i(T) = \ln(1-p_i) + r_i T - \frac{\alpha_i \mu [1-p_3 \exp(-cT) - (1-p_3) \exp(-cT)]}{c[1-(1-p_3) \exp(-cT)]}, (i=1, 2) \quad (6)$$

证明: 定义 $u(t) = x_1(t), v(t) = x_2(t), w(t) = z(t) - \tilde{z}(t)$ 分得:

$\tilde{z}(t)$, 代入模型(2)中, 通过 Taylor 展开式并取其线性部

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = u(t) [r_1 - \alpha_1 \tilde{z}(t)] \\ \frac{dv(t)}{dt} = v(t) [r_2 - \alpha_2 \tilde{z}(t)] \\ \frac{dw(t)}{dt} = -cw(t) + d_1 \alpha_1 \tilde{z}(t) u(t) + d_2 \alpha_2 \tilde{z}(t) v(t) \end{cases} \quad t \neq (n+l-1)T, t \neq nT$$

$$\begin{cases} u[(n+l-1)T^+] = (1-p_1)u[(n+l-1)T] \\ v[(n+l-1)T^+] = (1-p_2)v[(n+l-1)T] \\ w[(n+l-1)T^+] = (1-p_3)w[(n+l-1)T] \end{cases} \quad t = (n+l-1)T$$

$$\begin{cases} u(nT^+) = u(nT) \\ v(nT^+) = v(nT) \\ w(nT^+) = w(nT) \end{cases} \quad t = nT \quad (7)$$

设 $\varphi(t)$ 为模型(6)的基解矩阵, 则满足:

因此基解矩阵为

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} r_1 - \alpha_1 \tilde{z} & 0 & 0 \\ 0 & r_2 - \alpha_2 \tilde{z} & 0 \\ d_1 \alpha_1 \tilde{z} & d_2 \alpha_2 \tilde{z} & -c \end{pmatrix} \varphi(t) \quad (8)$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \exp\left\{\int_0^t [r_1 - \alpha_1 \tilde{z}(s)] ds\right\} & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left\{\int_0^t [r_2 - \alpha_2 \tilde{z}(s)] ds\right\} & 0 \\ * & * & \exp(-ct) \end{pmatrix} \quad (9)$$

后面没有用到 * 处的值, 因此此处不须要计算。对应的脉冲条件为

$$\begin{pmatrix} u[(n+l-1)T^+] \\ v[(n+l-1)T^+] \\ w[(n+l-1)T^+] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u[(n+l-1)T] \\ v[(n+l-1)T] \\ w[(n+l-1)T] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u(nT^+) \\ v(nT^+) \\ w(nT^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(nT) \\ v(nT) \\ w(nT) \end{pmatrix}$$

可得单值矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1-p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rho(T) \text{ 的特征值为}$$

$$\lambda_1 = (1-p_1) \exp \left\{ \int_0^T [r_1 - \alpha_1 \tilde{z}(s)] ds \right\},$$

$$\lambda_2 = (1-p_2) \exp \left\{ \int_0^T [r_2 - \alpha_2 \tilde{z}(s)] ds \right\},$$

$$\lambda_3 = (1-p_3) \exp(-cT) < 1$$

当 λ_1, λ_2 满足 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 时, 根据 Floquet 理论

$$g_1(T) = \ln(1-p_1) - r_1 T - \frac{\alpha_1 \mu [1-p_3 \exp(-cT) - (1-p_3) \exp(-cT)]}{c(1+w_1 K) [1 - (1-p_3) \exp(-cT)]};$$

$$g_2(T) = \ln(1-p_2) - r_2 T - \frac{\alpha_2 \mu [1-p_3 \exp(-cT) - (1-p_3) \exp(-cT)]}{c(1+w_2 K) [1 - (1-p_3) \exp(-cT)]}. \quad (7)$$

证明: 选取 $\varepsilon > 0$, 使得 $\eta = (1-p_1) \exp$

$$\left\{ \int_0^T \left\{ r_1 - \frac{\alpha_1 [\tilde{z}(t) - \varepsilon]}{1 + w_1 x_1} \right\} dt \right\} < 1. \text{ 由模型(2)可得}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} \leq x_1(t) \left[r_1 - \frac{r_1}{K} x_1(t) \right], t \neq (n+l-1)T, t \neq nT \\ x_1(t^+) = (1-p_1)x_1(t) \leq x_1(t), t = (n+l-1)T, t = nT \end{cases}.$$

利用脉冲微分方程比较定理有 $x_1(t) \leq u_1(t)$, 其中 $u_1(t)$ 为下式的解:

$$\begin{cases} \frac{du_1(t)}{dt} = u_1(t) \left[r_1 - \frac{r_1}{K} u_1(t) \right] \\ u_1(0^+) = x_0 \end{cases}.$$

可知 $u_1(t) = \frac{Kx_0}{(K-x_0)e^{-r_1 t} + x_0} \rightarrow K (t \rightarrow \infty)$, 即对任意的

$\varepsilon > 0, t$ 充分大时有 $x_1(t) \leq K + \varepsilon$. 因此可以假设对任意 $t > 0$, 有 $x_1(t) \leq K + \varepsilon$.

由 $\frac{dz(t)}{dt} \geq -cz(t)$, 利用脉冲微分不等式得 $z(t) \geq \tilde{z}(t)$.

因此当 t 充分大时, 有 $z(t) \geq \tilde{z}(t) > \tilde{z}(t) - \varepsilon$. 由模型(3)可知:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} \leq x_1(t) \left\{ r_1 - \frac{\alpha_1 [\tilde{z}(t) - \varepsilon]}{1 + w_1 x_1(t)} \right\}.$$

在区间 $[(n+l-1)T, (n+l)T]$ 上积分, 得到

$$0 \leq x_1(t) \leq x[(n+l-1)T] \exp \left\{ \int_0^T \left\{ r_1 - \frac{\alpha_1 [\tilde{z}(t) - \varepsilon]}{1 + w_1 x_1} \right\} dt \right\}.$$

因此, 有 $x_1[(n+l)T] \leq x_1(lT) \eta^n$, 其中 $\eta = (1-p_1) \exp$

$$\left\{ \int_0^T \left\{ r_1 - \frac{\alpha_1 [\tilde{z}(t) - \varepsilon]}{1 + w_1 x_1} \right\} dt \right\} \in (0, 1), \text{ 因此 } x_1[(n+l)T] \rightarrow$$

$0 (n \rightarrow \infty)$. 同时当 $t \in [(n+l-1)T, (n+l)T]$ 时, 有

$$0 \leq x_1(t) \leq x[(n+l-1)T] (1-p_1) e^{rT}.$$

因此 $x_1(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$.

同理可得 $x_2[(n+l)T] \leq x_2(lT) \delta^n$, 其中 $\delta = (1-p_2) \exp$

$$\left\{ \int_0^T \left\{ r_2 - \frac{\alpha_2 [\tilde{z}(t) - \varepsilon]}{1 + w_2 x_2^2} \right\} dt \right\} \in (0, 1), \text{ 因此 } x_2[(n+l)T] \rightarrow$$

$0 (n \rightarrow \infty)$. 同时当 $t \in [(n+l-1)T, (n+l)T]$ 时, 有

$$0 \leq x_2(t) \leq x[(n+l-1)T] (1-p_2) e^{rT}.$$

因此 $x_2(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$.

证明: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $z(t) \rightarrow \tilde{z}(t)$. 取充分小的正数 $\varepsilon_1 > 0$,

可知, 2 类食饵全部灭绝周期解 $[0, 0, \tilde{z}(t)]$ 是渐近稳定的. 而 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 的充要条件是 $f_1(T) < 0, f_2(T) < 0$. 由于 $f_i(0) = \ln(1-p_i) < 0, f_i(T) \rightarrow \infty (T \rightarrow \infty)$ 同时 $f'_i(T) > 0$, 则 $f_i(T) = 0$ 有唯一的正根 T_i . 当 $T \leq \min\{T_1, T_2\}$ 时, $f_1(T) < 0, f_2(T) < 0$. 因此定理 1 得证.

定理 2 设 $[x_1(t), x_2(t), z(t)]$ 为模型(2)的任意解, 如果满足 $\hat{T} \leq \min\{\hat{T}_1, \hat{T}_2\}$, 则 2 类食饵全部灭绝周期解 $[0, 0, \tilde{z}(t)]$ 是全局渐近稳定的. 其中 \hat{T}_1, \hat{T}_2 分别为 $g_1(T) = 0, g_2(T) = 0$ 的根.

存在 $T' > 0$, 使得当 $t \geq T'$ 时, 有 $0 < x_1(t) < \varepsilon_1, 0 < x_2(t) < \varepsilon_1$, 于是:

$$-cz \leq \frac{dz}{dt} \leq z(-c + d_1 \alpha_1 \varepsilon_1 + d_2 \alpha_2 \varepsilon_1).$$

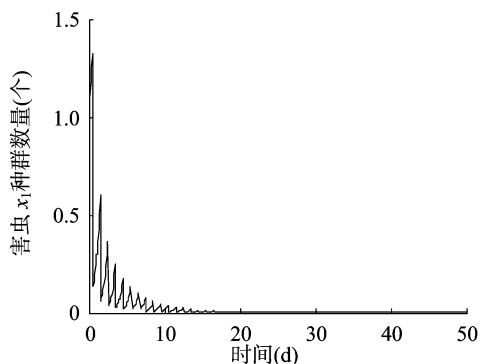
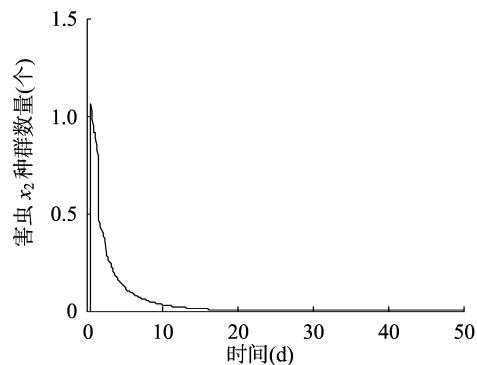
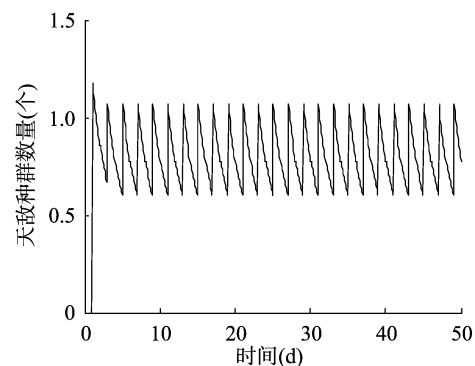
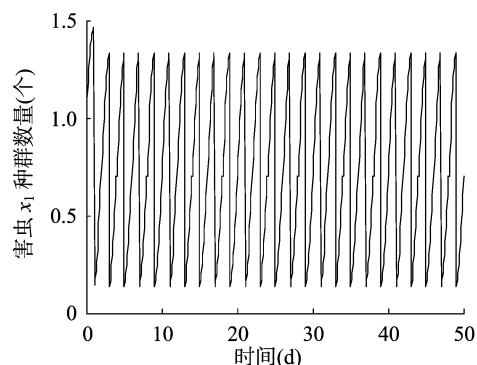
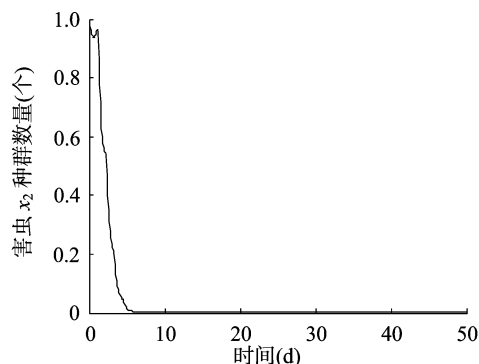
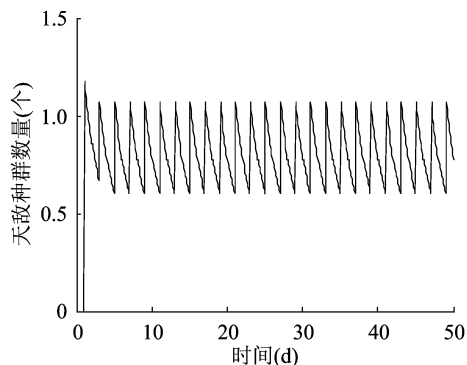
再次利用比较定理可知, $\tilde{z}_1(t) \leq z(t) \leq \tilde{z}_2(t)$, 其中 $\tilde{z}_1(t)$ 和 $\tilde{z}_2(t)$ 分别为将模型(3)中第 1 个方程的 c 改为 $-c + d_1 \alpha_1 \varepsilon_1 + d_2 \alpha_2 \varepsilon_1$ 的解. 令 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{z}_1(t) \rightarrow \tilde{z}(t), \tilde{z}_2(t) \rightarrow \tilde{z}(t)$, 由极限理论中的夹逼定理可知, $z(t) \rightarrow \tilde{z}(t)$. 综上所述, 定理 2 得证.

3 数值模拟

由于 $f_i(0) = \ln(1-p_i) < 0, f_i(T) \rightarrow \infty (T \rightarrow \infty)$, 同时 $f'_i(T) > 0$, 因此 $f_i(T) = 0$ 有唯一的正根 $T_i (i=1, 2)$, 且当 $T \leq \min\{T_1, T_2\}$ 时, 公式(5)成立. 同理 $g_i(T) = 0$ 有唯一的正根 $\hat{T}_i (i=1, 2)$, 且当 $\hat{T} \leq \min\{\hat{T}_1, \hat{T}_2\}$ 时, 公式(7)成立. 通过分析得到 $\min\{\hat{T}_1, \hat{T}_2\} < \min\{T_1, T_2\}$, 利用 Matlab 软件进行数值模拟, 将模型(2)中的参数取值为 $r_1 = 3, r_2 = 4, K = 1.5, u = 5, l = 0.2, c = 0.4, p_1 = 0.7, p_2 = 0.8, p_3 = 0.2, w_1 = 1, w_2 = 2, \alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.6$, 由定理 1、定理 2 知, $T_1 = 1.6, T_2 = 1.7, \hat{T}_1 = 0.9, \hat{T}_2 = 0.7$, 因此当 $T < 1.6$ 时, 2 类食饵全部灭绝周期解 $[0, 0, \tilde{z}(t)]$ 是局部渐近稳定的, 结果与初值的选择有关. 当 $T = 0.65$ 时, 2 类食饵全部灭绝周期解 $[0, 0, \tilde{z}(t)]$ 是全局渐近稳定的, 结果与初值的选择无关. 此时 2 类食饵很快趋于零, 而天敌出现周期性波动 (图 1 至图 3). 若 $0.7 < T = 0.8 < 0.9$ 时, x_2 迅速趋于 0, 而 x_1 与 z 出现周期性波动 (图 4 至图 6). 因此, 若 x_2 为主要食饵, x_1 为次要食饵, 可以通过控制脉冲周期将主要食饵灭绝, 保留次要食饵.

4 结束语

本研究建立了在不同脉冲时刻分别喷洒化学农药和投放捕食者的 2 个食饵 1 个捕食者模型, 由脉冲微分方程理论得出模型(2)中食饵全部灭绝周期解稳定性成立的充分条件, 并利用 Matlab 软件进行数值模拟. 在实际中, 此结论有广泛的应用, 适用于所有的 2 个食饵 1 个捕食者情形. 如在农业中, 可以根据农田中天敌和害虫的具体情况, 通过调节相应的参数改变脉冲周期, 将 2 类害虫全部灭绝或将主要害虫灭绝,

图1 $T=0.65$ 时害虫 x_1 种群的时间序列图2 $T=0.65$ 时害虫 x_2 种群的时间序列图3 $T=0.65$ 时天敌种群的时间序列图4 $T=0.8$ 时害虫 x_1 种群的时间序列图5 $T=0.8$ 时害虫 x_2 种群的时间序列图6 $T=0.8$ 时天敌种群的时间序列

保留次要害虫,从而给出治理害虫的方法,达到保护植物以及提高农业产量的目的,具有重要的理论和现实意义。

参考文献:

- [1] Liu B, Teng Z D, Chen L S. Analysis of a predator-prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy

- [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 193 (1): 347-362.
- [2] Kim H K, Baek H. The dynamical complexity of a predator-prey system with Hassell-Varley functional response and impulsive effect [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2013, 94: 1-14.
- [3] Dong L Z, Chen L S, Sun L H. Extinction and permanence of the predator-prey with stocking of prey and harvesting of predator impulsive [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2006, 29(4): 415-425.
- [4] 刘娟. 具有状态脉冲效应的害虫防治模型 [J]. 山西农业大学学报(自然科学版), 2017, 37(3): 173-176, 188.
- [5] 宋新宇, 郭红建, 师向云. 脉冲微分方程理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 165-197.
- [6] Zhang Y J, Liu B, Chen L S. Extinction and permanence of a two-prey one-predator system with impulsive effect [J]. Mathematical Medicine and Biology, 2003, 20(4): 309-325.
- [7] Wang X H, Huang C Y. Permanence of a stage-structured predator-prey system with impulsive stocking prey and harvesting predator [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 235(2): 32-42.
- [8] 官金兰, 房少梅. 具有时滞和 Holling III 型功能反应的三种群捕食模型的全局渐近稳定性 [J]. 韶关学院学报, 2014, 35(4): 5-9.
- [9] Wang Z, Shao Y F, Fang X J, et al. The dynamic behaviors of one-predator two-prey system with mutual interference and impulsive control [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2017, 132: 68-85.
- [10] Sun K B, Zhang T H, Tian Y. Dynamics analysis and control optimization of a pest management predator-prey model with an integrated control strategy [J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 292: 253-271.